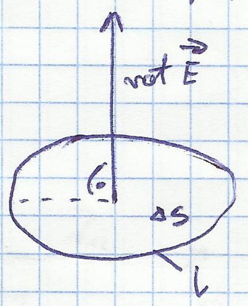
Opracowanie zagadnień do egzaminu z elektromagnetyzmu.

2012/2013 Łakatosz Łackintosh (III 2013)

1. Podstawy rachunku operatorowego. Definicje i sposoby liczenia rotacji, dywergencji, gradientu, laplasjanu skalarnego i wektorowego. Wymienić najważniejsze tożsamości rachunku operatorowego.

<u>Rotacja</u> – operacja różniczkowa, która danemu polu wektorowemu, przyporządkowuje pewne nowe pole wektorowe. Służy do sprawdzania czy w danym polu wektorowym występują wiry pola. Jeżeli dane pole wektorowe opisane jest pewną funkcją wektorową i rotacja tej funkcji wynosi 0 to takie pole nazywamy bezwirowym.



$$\text{def: } \operatorname{rot}\vec{E} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_L \vec{E}\, d\vec{l}}{\Delta S}$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = \vec{\nabla}\times\vec{E} = \left(\frac{dE_z}{dy} - \frac{dE_y}{dz}\right)\vec{i} + \left(\frac{dE_x}{dz} - \frac{dE_z}{dx}\right)\vec{j} + \left(\frac{dE_y}{dx} - \frac{dE_x}{dy}\right)\vec{k}$$

<u>Dywergencja</u> – jest operacją różniczkową, która danemu polu wektorowemu przyporządkowuje pewne nowe pole skalarne. Służy do sprawdzania czy w polu znajdują się źródła pola. Jeżeli jest równa 0 to takie pole jest polem bezźródłowym.

$$\text{def: } \operatorname{div}\vec{E} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_S \vec{E}\, d\vec{s}}{\Delta V} \qquad \operatorname{div}\vec{E} = \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{dE_x}{dx} + \frac{dE_y}{dy} + \frac{dE_z}{dz}$$

<u>Gradient pola</u> – operacja, którą stosujemy w polach skalarnych. Służy do wyznaczania kierunku najszybszej zmiany wartości w polu skalarnym i do wyznaczania rozkładu potencjału. dane p. skalarne → nowe p. wektorowe

$$\operatorname{grad}\Phi(x,y,z) = \frac{d\Phi(x,y,z)}{dx}\vec{i} + \frac{d\Phi(x,y,z)}{dy}\vec{j} + \frac{d\Phi(x,y,z)}{dz}\vec{k}$$

Laplasjan skalarny – operacja różniczkowa II rzędu, która danemu polu skalarnemu przyporządkowuje nowe pole skalarne.

$$\Delta \Phi = \frac{d^2 \Phi(x,y,z)}{dx^2} + \frac{d^2 \Phi(x,y,z)}{dy^2} + \frac{d^2 \Phi(x,y,z)}{dz^2} \quad \text{(wynik jest skalarny)}$$

Laplasjan wektorowy – operacja różniczkowa II rzędu, która danemu polu wektorowemu przyporządkowuje nowe pole wektorowe.

$$\Delta \vec{E} = \left(\frac{d^2 E_x}{dx^2} + \frac{d^2 E_x}{dy^2} + \frac{d^2 E_x}{dz^2}\right) i + \left(\frac{d^2 E_y}{dx^2} + \frac{d^2 E_y}{dy^2} + \frac{d^2 E_y}{dz^2}\right) j + \left(\frac{d^2 E_z}{dx^2} + \frac{d^2 E_z}{dy^2} + \frac{d^2 E_z}{dz^2}\right) k$$

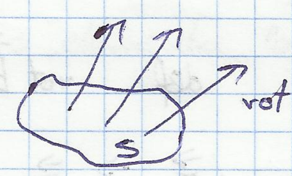
Podstawowe tożsamości rachunku operatorowego:

$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \equiv 0$ (dywergencja rotacji)

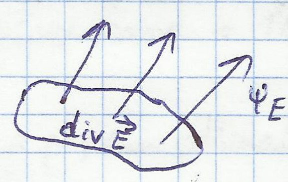
$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \cdot f - \vec{\nabla}^2 f = \Delta f$ (dywergencja gradientu)

$\vec{\nabla}^2 \times (\vec{\nabla} f) = 0$ (rotacja gradientu)

$\oint_l \vec{E}\, d\vec{l} = \int_s \text{rot}\, \vec{E}\, d\vec{s}$ (Tw. Stockesa)



$\oint_s \vec{E}\, d\vec{s} = \oint_v \text{div}\, \vec{E}\, d\vec{v}$ (Tw. Ostrogradzkiego-Greena)



2. Pole elektrostatyczne. Prawo Coulomba. Definicja natężenia pola elektrycznego, potencjał - sposoby liczenia, napięcie i związek z potencjałem, prawo Gaussa, równanie Poissona i Laplace'a, potencjał a natężenie pola.

Pole elektrostatyczne - to przestrzeń wokół nieruchomych ładunków lub ciał naelektryzowanych w której na ładunki elektr. działają siły ($P = \int_l \vec{F} d\vec{l}$). Pole elektrostatyczne jest polem potencjalnym (praca nie zależy od drogi). Praca w tym polu po drodze zamkniętej wynosi 0 ($\oint_c \vec{F_c}\, d\vec{l} = 0 \Rightarrow$ cyrkulacja)

Potencjał - miara pracy jaką siły zewnętrzne muszą wykonać, aby przesunąć ładunek q_0 od punktu odniesienia P_0 do pkt P.

dla $P_0 = \infty$

def: $\Phi_P = -\int_{\infty}^{P} \vec{E}\, d\vec{l}$ $\qquad \Phi_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{R}$ $\qquad$ R - odległość od ład q do P

Sposoby liczenia:

a) $\Phi_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{R_i}$

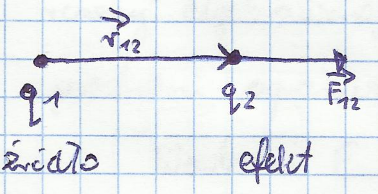
b) $\Phi_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_l \frac{\tau}{R}\, dl$

c) $\Phi_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_s \frac{\sigma_q}{R}\, ds$

d) $\Phi_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho_V dV}{R}$

w próżni φ w $\infty = 0$

<u>Prawo Coulomba</u> (1785) - siła wzajemnego oddziaływania dwóch punktowych ładunków elektrycznych jest wprost proporcjonalna do iloczynu tych ładunków i odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości między nimi.



$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_{12}|^3} \vec{r}_{12} \quad [N]$$

$\vec{r}_{12}$ - wektor wodzący $\qquad \varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \left[\frac{F}{m}\right]$

$q_1 q_2$ - ładunki elektryczne

<u>Natężenie pola elektrycznego</u> - stosunek siły wynikającej z pr. Coulomba do wielkości ładunku.

siła wypadkowa

$$\vec{E}(x_0, y_0, z_0) = \frac{\vec{F}_{wo}}{q_0} = \frac{\vec{F}_{q0}(x_0, y_0, z_0)}{q_0} \left[\frac{V}{m}\right]$$

$q_0 \to 0$ ład. próbny

$q_0 > 0$ ład. dodatni

<u>Napięcie elektryczne</u> między pkt 1 i 2 jest miarą pracy, jaką siły pola elektr. wykonują przesuwając go z pkt 1 do pkt 2.

def: $U_{12} = \int_1^2 \vec{E}\, d\vec{l}$ [V] $\qquad U_{12} = \Phi_1 - \Phi_2 \Rightarrow$ różnica potencjałów

Prawo Gaussa – strumień wektora $\vec{E}$ przez dowolną zamkniętą powierzchnię S, równy jest algebraicznej sumie ładunków zgromadzonych w bryle ograniczonej pow. S podzieloną przez ε_0.

a) postać całkowa $\oint_S \vec{E}\,\vec{ds} = \frac{\Sigma q}{\varepsilon_0}$, $\Sigma q = \int_V \rho\, dv$

b) postać różniczkowa $\operatorname{div} E = \frac{q_v}{\varepsilon_0}$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{q_v}{\varepsilon_0}$

(w obszarach gdzie nie ma ładunku divergencja jest równa 0)

Równanie Poissona:

$$\left.\begin{array}{l} \nabla^2 \Phi = -\frac{\rho_v}{\varepsilon_0} \\ \Delta \Phi = -\frac{\rho_v}{\varepsilon_0} \end{array}\right\} \Rightarrow \Phi \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{q_v dv}{\varepsilon_0}$$

Równanie Poissona

Rozwiązanie równania Poissona

Równanie Laplace'a:

dla $\rho_v = 0$
$$\nabla^2 \Phi = 0$$
$$\Delta \Phi = 0$$

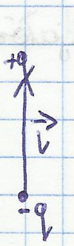
Potencjał a natężenie pola elektrycznego:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi \quad , \quad \Phi_P = -\int_\infty^P \vec{E}\,\vec{dl}$$

3. Dielektryki, dipol elektryczny, definicja wektora polaryzacji, wektor indukcji elektrycznej, wartość i jednostka ε_0, wartość ε_w dla różnych materiałów.

Dielektryk – materiał, w którym występują dipole elektryczne. W diel. idealnym nie mogą się przemieszczać ładunki swobodne (jednorodne, liniowe, izotropowe, dyspersja)

Dipol elektryczny – cząstka, w której średnie położenie ładunku dodatniego +q, jest przemieszczone względem średniego położenia ładunku ujemnego -q.



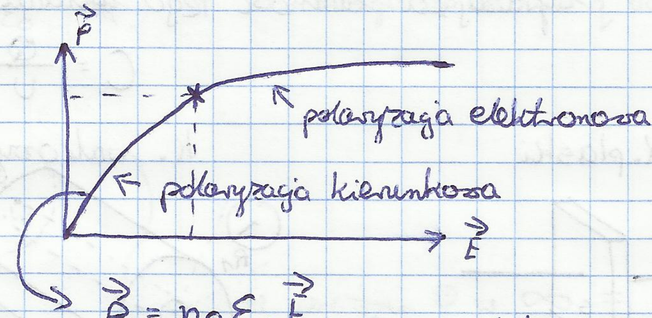
$\vec{p} = q\cdot\vec{l}$ [C·m]

moment elektryczny dipola

W polu elektrycznym działają siły, które ~~stają~~ starają się ustawić dipol zgodnie z kierunkiem pola.

Wektor polaryzacji – gęstość wypadkowego momentu elektrycznego. Można go zmierzyć poprzez pomiar innych wielkości fizycznych.

def: $\vec{P} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum_i \vec{p_i}}{\Delta V} \quad \left[\frac{C}{m^2}\right]$



$\vec{P} = \eta_e \varepsilon_0 \vec{E}$

η_e – podatność elektryczna materiału (bezwymiar)

Wektor indukcji elektrycznej:

$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_w \vec{E} \quad \left[\frac{C}{m^2}\right]$

$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

ε_w – względna przenikalność elektryczna (bezwymiarowa)

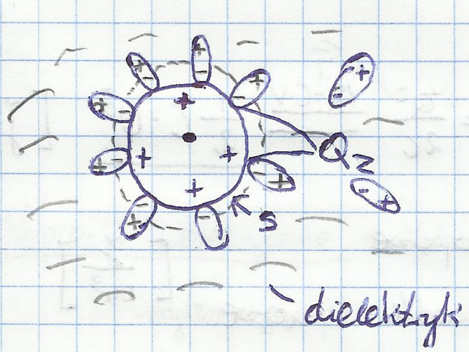
$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \left[\frac{F}{m}\right]$

Strumień wektora indukcji elektr. przez dowolną zamkniętą powierzchnię S jest równy algebraicznej sumie ładunków swobodnych zgromadzonych w przestrzeni ograniczonej powierzchnią S.

Wartości ε_w dla różnych materiałów:

- próżnia $\varepsilon_w = 1$
- powietrze (1atm) $\varepsilon_w = 1{,}00059$
- woda (20°C) $\varepsilon_w = 80$
- olej transf. $\varepsilon_w = 2{,}2$

Prawo Gaussa w dielektryku:



$Q_z = -\oint_S \vec{P}\, d\vec{S}$

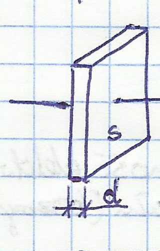
Q_z – ładunek związany

4. Pojemność elektryczna, sposoby liczenia, pojemności podstawowych układów, energia w kondensatorze.

Pojemność elektryczna – cecha zależna od parametrów geometrycznych układu, wyrażająca zdolność tego układu do gromadzenia ład. elektrycznych;

$$C = \frac{Q}{U} \quad [F]$$

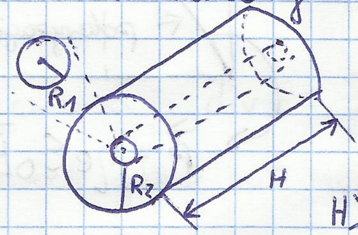
K. płaski



$S \gg d^2$

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_w S}{d}}$$

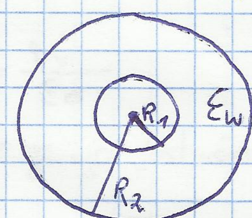
K. walcowy



$H \gg R_2$

$$\boxed{C = \frac{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_w H}{\ln \frac{R_2}{R_1}}}$$

K. sferyczny



$$\boxed{C = \frac{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_w}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}}}$$

Sposoby obliczania:

1. Z definicji $U_{12} = \int_1^2 \vec{E}\, d\vec{l}$, $\vec{E}$ - wyznaczamy np z Prawa Gaussa;
2. Metoda stałych rozłożonych - dzielimy układ na elementarne dC
   a) dla elementów dyskretnych
   - $\boxed{\text{poł. szeregowe}}$ $\frac{1}{C_w} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{C_i}$
   - $\boxed{\text{poł. równoległe}}$ $C_w = \sum_{i=1}^{N} C_i$

   b) stałe rozłożenie
   - $\frac{1}{C_w} = \int \frac{1}{dC}$
   - $C_w = \int dC$

Energia zgromadzona w kondensatorze – jest elementarną pracą dW potrzebną do przemieszczenia elementarnego ładunku dq z jednej okładki na drugą.

$$dW = U \cdot dq = \frac{q}{C} dq \qquad \mathcal{E}_{kond} = \int_0^Q dW = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C} \xrightarrow{Q = C\cdot U} \frac{1}{2} C \cdot U^2 \quad [J]$$

Gęstość energii: $w_e = \boxed{\frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}}$ => ośrodki izotropowe $\left[\frac{J}{cm^3}\right]$

$$w_e = \frac{\mathcal{E}_{kond}}{V_{diel}} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_w \cdot E^2 \Rightarrow \text{ośrodki liniowe}$$

Każde pole elektryczne jest nośnikiem energii, której gęstość zapisana jest powyższym wzorem.

5. Prąd elektryczny (definicja), typy prądów, równanie ciągłości, lokalne i obwodowe prawo Ohma, I i II p. Kirchoffa.

<u>Prąd elektryczny</u> – uporządkowany ruch ład. elektrycznych. Za kierunek prądu przyjęto umownie kierunek ruchu ład. dodatnich. Prąd płynie wzdłuż linii sił pola elektrycznego, a także od wyższego do niższego potencjału.

<u>Typy prądów</u>:

a) liniowy $I = \frac{dQ}{dt}$ $[A]$, $1A = 10^{-19}$ elektronów

b) powierzchniowy $I = \int_l \vec{j}_{s\perp}\, dl$, $\vec{j}_s = \sigma_q \cdot \vec{V}_{śr} = e \cdot N_e \cdot \vec{V}_{śr}$ $\left[\frac{A}{m^2}\right]$

$\vec{j}_s$ – gęstość prądu; $\vec{V}_{śr}$ – średnia prędkość; N_e – koncentracja $\left[\frac{\text{ilość elektr}}{m^3}\right]$

c) objętościowy $I = \int_S \vec{j}\, d\vec{s}$

<u>Równanie ciągłości</u>:

a) postać całkowa $\oint_S \vec{j}\, d\vec{s} = -\frac{dQ}{dt}$

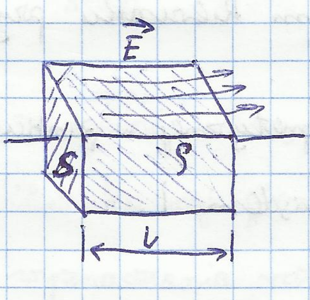
b) postać różniczkowa $\mathrm{div}\, \vec{j} = -\frac{dq_v}{dt}$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\frac{dq_v}{dt}$

<u>Lokalne prawo Ohma</u>:

a) $\vec{j} = \vec{E} \cdot \sigma$, σ - przewodność właściwa materiału $\left[\frac{1}{\Omega \cdot m}\right]$, $\sigma = \frac{1}{\rho}$

b) $\vec{E} = \rho \cdot \vec{j}$, ρ - oporność właściwa $[\Omega \cdot m]$

<u>Obwodowe prawo Ohma</u>:



$\frac{U}{I} = \rho \cdot \frac{l}{S} = R$ $[\Omega]$

I prawo Kirchoffa - algebraiczna suma prądów i ładunków dopływających i wypływających z węzła jest równa 0.

$$\sum_{i=1}^{N} I_i = 0 \quad , \quad \sum_{i=1}^{N} q_i = 0$$

II prawo Kirchoffa - algebraiczna suma sił elektromotorycznych i spadków napięć w zamkniętym obwodzie jest równa 0.

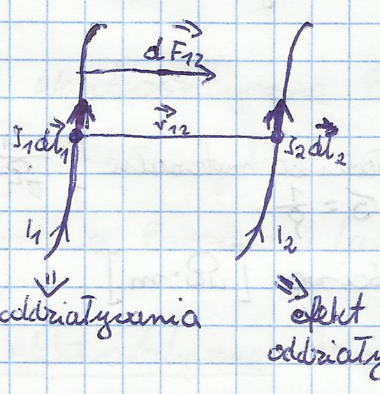
$$\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i + \sum_{i=1}^{N} U_i = 0$$

6. Pole magnetyczne, prawo Grassmanna, Biota-Savarta i prawo przepływu Ampera, prawo indukcji elektromagnetycznej Faradaya, reguła Lenza - rysunki i wzory.

Pole magnetyczne (magnetostatyczne) - stosunek siły działającej na element z prądem $I\,d\vec{l}$ do wartości tego elementu. Pole magnetyczne jest polem wirowym.

$$d\vec{B} = \frac{d\vec{F}}{I\,d\vec{l}} \quad [T]$$ - wyrażana w Teslach

Prawo Grassmanna: - siła z jaką jeden przewodnik z prądem oddziałuje na drugi.

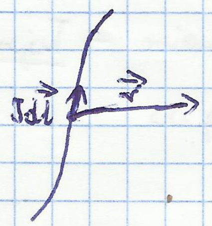


$$d\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \frac{d\vec{l}_2 \times (d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12})}{|\vec{r}_{12}|^3} \quad [N]$$

μ_0 - współczynnik przenikalności magnetycznej w próżni, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} = 12{,}56 \cdot 10^{-7}$

Dwa przewody, których prądy płyną w tym samym kierunku przyciągają się.

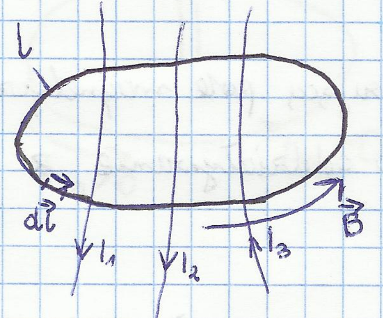
Prawo Biota-Savarta - określa wartość indukcji magnetycznej w punkcie odległym o r od elementu z prądem I.



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad [T] \quad , \quad 1T = 10^4 G_s \left[\frac{wB}{cm^2}\right]$$

Gauss

Prawo przepływu Ampera - cyrkulacja natężenia pola magnetycznego po dowolnej krzywej zamkniętej jest równa algebraicznej sumie prądów obejmowanych przez kontur l.



$$\oint_l \vec{H}\,d\vec{l} = \sum_{i=1}^{N} I_i$$

* $\vec{H}$ - natężenie pola magnetycznego

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad \left[\frac{A}{m}\right]$$

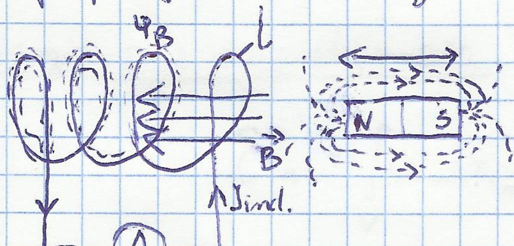
$\vec{M}$ - wektor namagnesowania

$$\vec{M} = \mu_0 \eta_m \vec{H}$$, η_m - podatność magnetyczna materiału

$$\vec{B} = \mu_0\vec{H} + \mu_0\eta_m\vec{H} = \mu_0(1+\eta_m)\vec{H} = \mu_0\mu_w\vec{H}$$

Prawo indukcji elektromagnetycznej Faradaya:

Przy dowolnej zmianie strumienia indukcji magnetycznej obejmowanego przez zamknięty obwód, w obwodzie tym indukuje się siła elektromotoryczna, proporcjonalna do szybkości zmian obejmowanego strumienia.



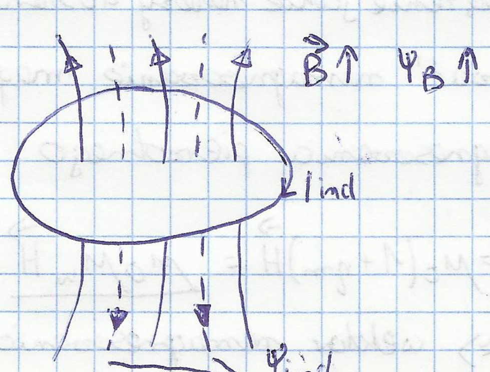
$$\mathcal{E} = -\frac{d\Psi_B}{dt}$$

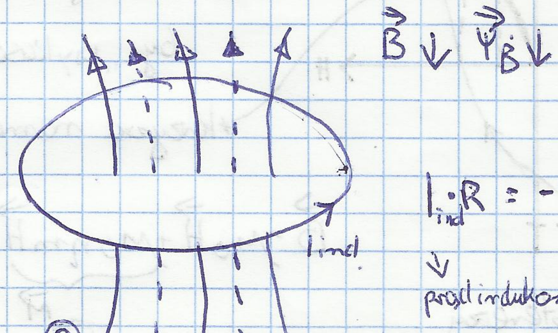
$$\oint_l \vec{E}\,d\vec{l} = -\frac{d\Psi_B}{dt} \Rightarrow \text{postać całkowa}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}, \quad \vec{\nabla}\times E = -\frac{d\vec{B}}{dt} \Rightarrow \text{p. różniczkowa}$$

Reguła Lenza:

Przy dowolnej zmianie strumienia indukcji magnetycznej indukują się w obwodzie prądy o takim kierunku, że pole magn. prądów indukowanych przeciwdziała zmianom strumienia magnetycznego.



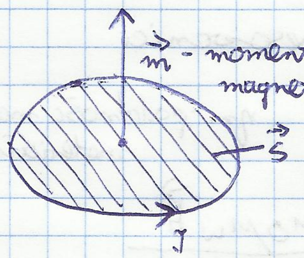


$$I_{ind}\cdot R = -\frac{d\Psi_{ind}}{dt}$$

I_{ind} → prąd indukowany

7. Moment magnetyczny, wektor namagnesowania, pole magnetyczne w ośrodkach materialnych. Krzywa histerezy, indukcyjność własna i wzajemna, energia pola magnetycznego.

Moment magnetyczny – jest własnością danego ciała opisującą pole magnetyczne wytwarzane przez to ciało, a tym samym i jego oddziaływanie z polem magnetycznym.



$\vec{m} = I \cdot \vec{S}$ $[A \cdot m^2]$, gdzie $\vec{S} = S \cdot \vec{n}_{\perp}$

$\Leftarrow$ dipol magnetyczny

Wektor namagnesowania - wyraża gęstość wypadkowego momentu magnet.

$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum_i \vec{m}_i}{\Delta V} \quad \left[\frac{A}{m}\right]$$

~~Natężenie pola magnetycznego~~

~~def: $\vec{H}$ =~~ (było - st. 9)

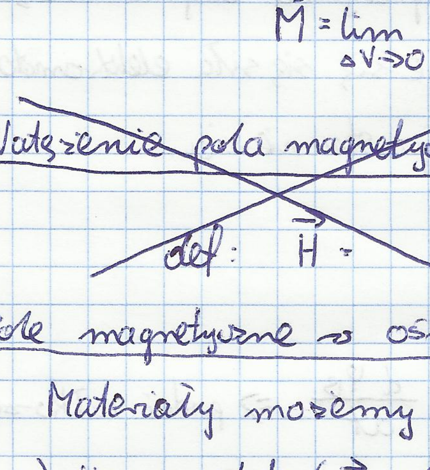
Pole magnetyczne w ośrodkach materialnych

Materiały możemy podzielić na:

a) diamagnetyki ($\vec{m}_i = 0, \vec{M} = 0$); Cu - $\mu_w = 0{,}999991$, Ag - $\mu_w = 0{,}999974$

b) paramagnetyki ($\vec{m}_i \neq 0, \vec{M} = 0$); powietrze - $\mu_w = 1{,}0000004$, Al - $\mu_w = 1{,}000022$

c) ferromagnetyki ($\vec{m}_i \neq 0, \vec{M} \neq 0$); czyste Fe - $\mu_w = 2\,750\,000$ (b. duże)



B_r - indukcja resztkowa

H_c - koercja (natężenie jakie należy dostarczyć, by „wykasować" namagnesowanie magnesu.

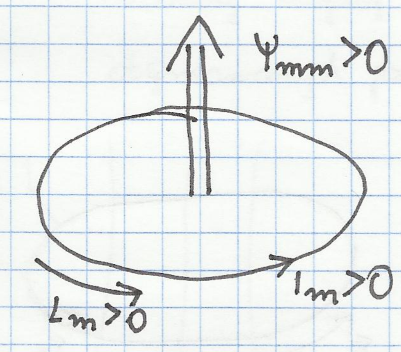
*Krzywa namagnesowania pierwotnego

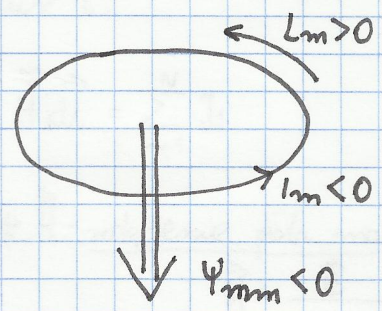
$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \underbrace{\mu_0 \chi_m \vec{H}}_{\vec{M}} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \underline{\mu_0 \mu_w \vec{H}}$$

$\Rightarrow$ wektor namagnesowania

Krzywa histerezy

Indukcja własna:



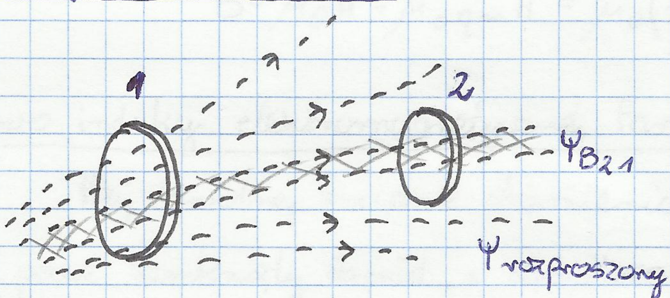


$$L_{m} = \frac{\Psi_{mm}}{I_m}$$

L_m – indukcyjność własna

Ψ_{mm} – strumień indukcji magn. wytworzonej przez obwód, w którym płynie prąd I_m.

Indukcyjność wzajemna:



$$M_{21} = \frac{\Psi_{B21}}{I_1} \, [H], \quad M_{21} = M_{12}$$

Henr

Ψ_{B21} – strumień skojarzony z obw. 2, wytworzony przez obw. 1

Energia pola magnetycznego:

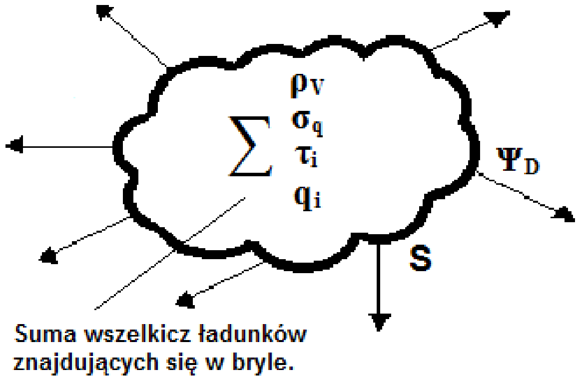
$$\mathcal{E}_m = \int_V w_m(x,y,z)\,dV = \int_V \left(\frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B}\right) dV \quad \text{(całk. energia w objętości V)}$$

8. Równania Maxwella. Postać całkowa (wzór, treść i rysunek), postać różniczkowa i zespolona. Podać pełne wyrażenie na ε_{sk}.

Prawo Gaussa:

$$\oint_S \vec{D}\, d\,\vec{S} = Q_s \quad , \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_V \quad , \quad \mathrm{div}\,\vec{D} = \rho_V \quad , \quad D_{N2} - D_{N1} = \sigma_q$$

Strumień wektora indukcji elektrycznej przez dowolną zamkniętą powierzchnie jest równy algebraicznej sumie ładunków swobodnych zgromadzonych wewnątrz bryły ograniczonej powierzchnią S.



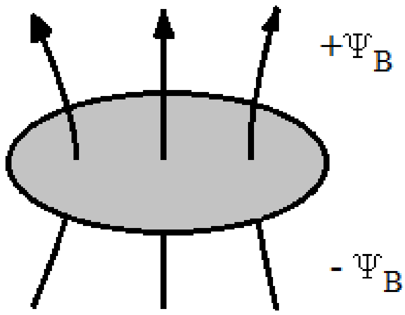
Prawo Gaussa (dla pola magnetycznego):

$$\oint_S \vec{B}\, d\,\vec{S} = 0 \quad , \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \quad , \quad \mathrm{div}\vec{B} = 0 \quad , \quad B_{N2} - B_{N1} = 0$$

Strumień wektora indukcji magnetycznej przez dowolną zamkniętą powierzchnię S zawsze jest równy 0.

$$\sum \Psi_B = 0$$

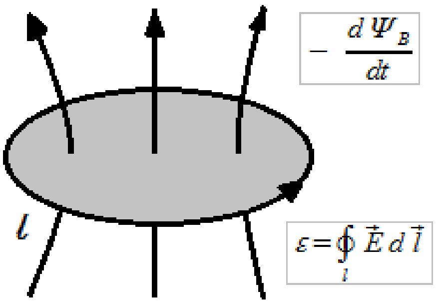
Pole magnetyczne jest bezźródłowe.



Prawo Faraday\`a:

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\,\vec{l} = -\frac{d\,\Psi_B}{dt} \quad , \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\mathrm{d}\,\vec{B}}{\mathrm{d}\,t} \quad , \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -j\,\omega\,\mu\,\vec{H} \quad , \quad E_{t2} - E_{t1} = 0$$

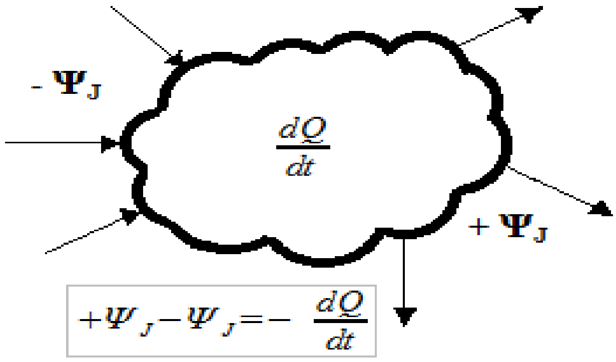
Cyrkulacja pola elektrycznego po dowolnej krzywej zamkniętej l, jest równa zmianie strumienia indukcji magnetycznej przenikającej przez dowolną powierzchnię rozpięta na konturze l.

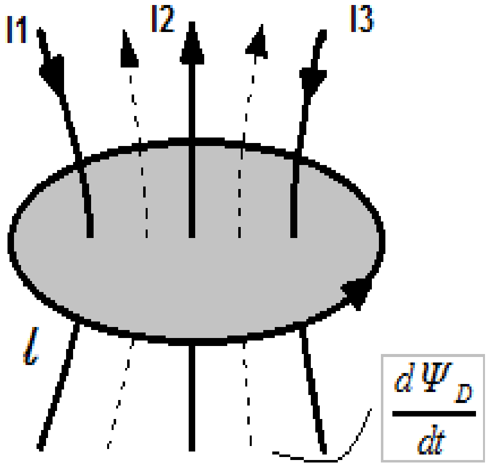


Prawo Ampera:

$$\oint_L \vec{H}\, d\,\vec{l} = \vec{J} + \frac{d\Psi_D}{dt} \quad , \quad \vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{d\vec{D}}{dt} \quad , \quad \vec{\nabla}\times\vec{H} = j\,\omega\,\varepsilon_{sk}\,\vec{E} \quad , \quad H_{t2} - H_{t1} = \vec{J}_{s\perp}$$

Cyrkulacja wektora H po dowolnej krzywej zamkniętej l jest równa algebraicznej sumie prądów obejmujących konturem l i zmiana strumienia indukcji elektrycznej przenikającego przez dowolną powierzchnię rozpiętą na konturze l.





Równanie ciągłości:

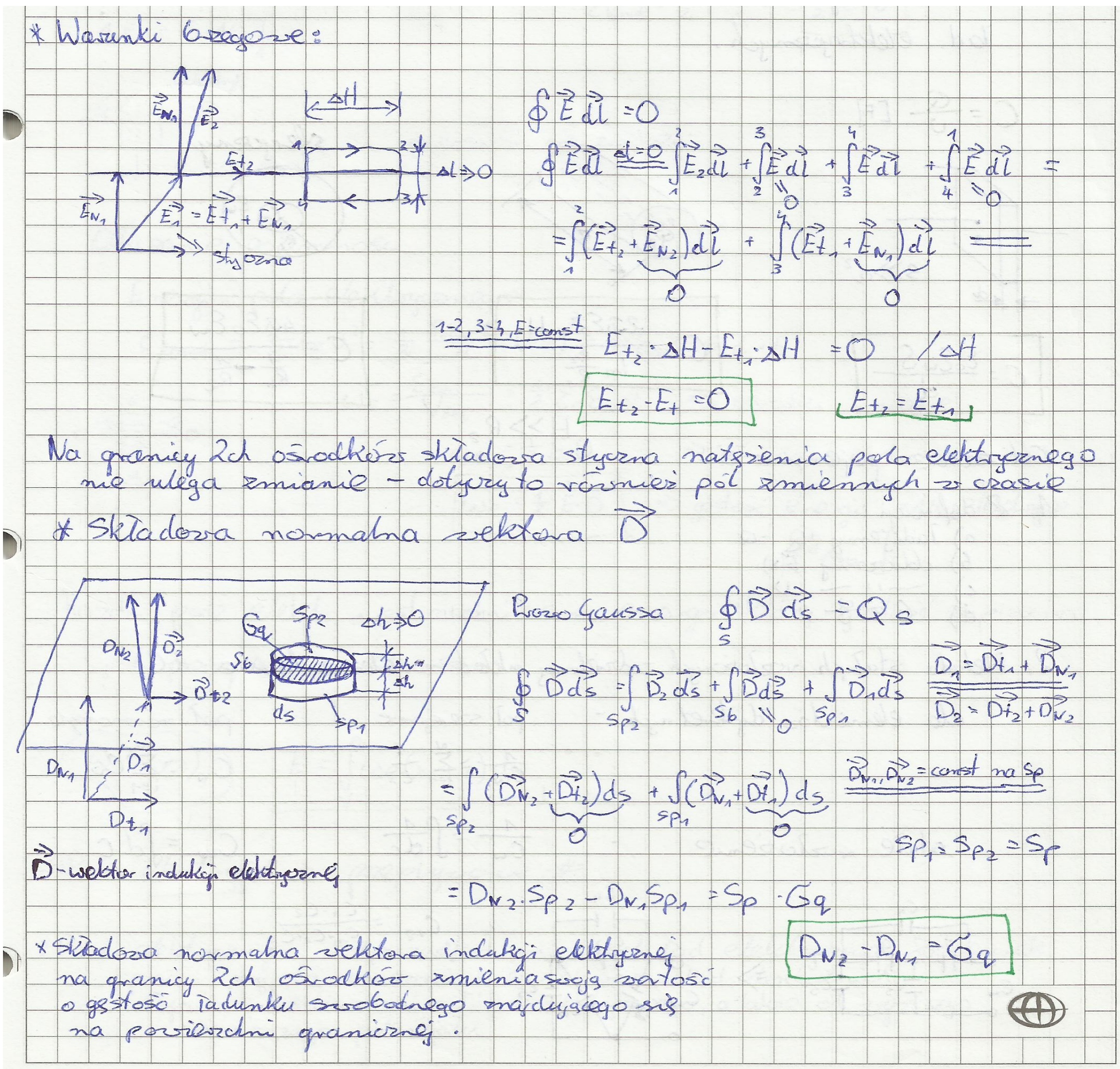
$$\oint_S \vec{J}\, d\vec{S} = -\frac{dQ}{dt} \quad , \quad \vec{\nabla}\times\vec{J} = \frac{d\rho_V}{dt} \quad , \quad J_{N2} - J_{N1} = -\frac{d\sigma_Q}{dt}$$

Strumień gęstości prądu przez dowolną zamkniętą powierzchnie S jest równy zmianie ładunku zawartego w bryle ograniczonej powierzchnią S.

$$\varepsilon_{sk} = \frac{\sigma}{j\omega} + \varepsilon = \frac{\sigma}{j\omega} + \varepsilon_0 \varepsilon_w$$

9. Warunki brzegowe wektorów pola elektrycznego, magnetycznego i J_n. Wyprowadzić warunki D_n i E_t.

1) $D_{N2} - D_{N1} = \sigma_q$ (prawo Gaussa)
2) $E_{t2} - E_{t1} = 0$ (prawo Faraday`a)
3) $H_{t2} - H_{t1} = \vec{J}_{s\perp}$ (prawo Ampera)
4) $J_{N2} - J_{N1} = -\frac{d\sigma_Q}{dt}$ (prawo ciągłości)



* Warunki brzegowe:

$\oint \vec{E}\, d\vec{l} = 0$

$\oint \vec{E}\, d\vec{l} \overset{\Delta l \to 0}{=} \int_1^2 \vec{E}_2\, d\vec{l} + \underbrace{\int_2^3 \vec{E}\, d\vec{l}}_{\approx 0} + \int_3^4 \vec{E}\, d\vec{l} + \underbrace{\int_4^1 \vec{E}\, d\vec{l}}_{\approx 0} =$

$= \int_1^2 (\vec{E}_{t2} + \underbrace{\vec{E}_{N2}) d\vec{l}}_{0} + \int_3^4 (\vec{E}_{t1} + \underbrace{\vec{E}_{N1}) d\vec{l}}_{0} =$

$\underline{1\text{-}2, 3\text{-}4, E = const}$ $E_{t2} \cdot \Delta H - E_{t1} \cdot \Delta H = 0 \quad / \Delta H$

$\boxed{E_{t2} - E_{t1} = 0}$ $E_{t2} = E_{t1}$

Na granicy 2ch ośrodków składowa styczna natężenia pola elektrycznego nie ulega zmianie – dotyczy to również pól zmiennych w czasie

* Składowa normalna wektora $\vec{D}$

Prawo Gaussa $\oint_S \vec{D}\, d\vec{s} = Q_S$

$\vec{D}_1 = \vec{D}_{t1} + \vec{D}_{N1}$
$\vec{D}_2 = \vec{D}_{t2} + \vec{D}_{N2}$

$\oint_S \vec{D}\, d\vec{s} = \int_{Sp_2} \vec{D}_2\, d\vec{s} + \underbrace{\int_{Sb} \vec{D}\, d\vec{s}}_{\approx 0} + \int_{Sp_1} \vec{D}_1\, d\vec{s}$

$= \int_{Sp_2} (\vec{D}_{N2} + \underbrace{\vec{D}_{t2}) ds}_{0} + \int_{Sp_1} (\vec{D}_{N1} + \underbrace{\vec{D}_{t1}) ds}_{0}$

$\underline{\vec{D}_{N1}, \vec{D}_{N2} = const \text{ na } Sp}$

$Sp_1 = Sp_2 = Sp$

$\vec{D}$ - wektor indukcji elektrycznej

$= D_{N2} \cdot Sp_2 - D_{N1} Sp_1 = Sp \cdot \sigma_q$

* Składowa normalna wektora indukcji elektrycznej na granicy 2ch ośrodków zmienia swoją wartość o gęstość ładunku swobodnego znajdującego się na powierzchni granicznej.

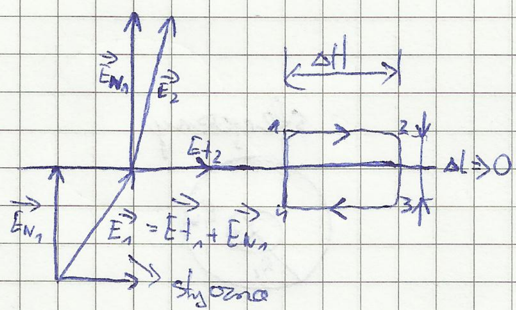
$\boxed{D_{N2} - D_{N1} = \sigma_q}$

Natężenie przebicia:

- powietrze ~30kV/cm
- teflon 200kV/cm
- ceramika elektotechn. ~300kV/cm
- mika 4000kV/cm

Dzięki warunkom brzegowym mamy odbicia i załamania światła, przy falach krótkich w nadajniku o mocy 2W można porozumiewać na dużą odległość – fale odbijają się od jonosfery.

* Warunki brzegowe:



$$\oint \vec{E}\,d\vec{l} = 0$$

$$\oint \vec{E}\,d\vec{l} \overset{\Delta l \to 0}{=} \int_1^2 \vec{E}_2\,d\vec{l} + \underbrace{\int_2^3 \vec{E}\,d\vec{l}}_{0} + \int_3^4 \vec{E}\,d\vec{l} + \underbrace{\int_4^1 \vec{E}\,d\vec{l}}_{0} =$$

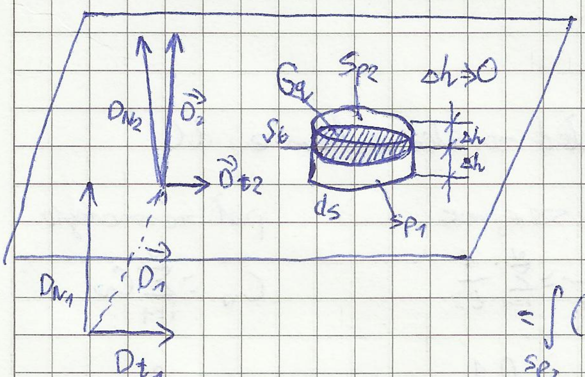
$$= \int_1^2 (\vec{E}_{t_2} + \underbrace{\vec{E}_{N_2})\,d\vec{l}}_{0} + \int_3^4 (\vec{E}_{t_1} + \underbrace{\vec{E}_{N_1})\,d\vec{l}}_{0} =$$

$$\overset{1-2,\,3-4,\,E=const}{=} E_{t_2}\cdot\Delta H - E_{t_1}\cdot\Delta H = 0 \quad /\Delta H$$

$$\boxed{E_{t_2} - E_{t} = 0} \qquad E_{t_2} = E_{t_1}$$

Na granicy 2ch ośrodków składowa styczna natężenia pola elektrycznego nie ulega zmianie – dotyczy to również pól zmiennych w czasie

* Składowa normalna wektora $\vec{D}$



Prawo Gaussa $\oint_S \vec{D}\,d\vec{s} = Q_s$

$$\oint_S \vec{D}\,d\vec{s} = \int_{Sp_2} \vec{D}_2\,d\vec{s} + \underbrace{\int_{Sb} \vec{D}\,d\vec{s}}_{0} + \int_{Sp_1} \vec{D}_1\,d\vec{s}$$

$\vec{D}_1 = \vec{D}t_1 + \vec{D}_{N_1}$

$\vec{D}_2 = \vec{D}t_2 + \vec{D}_{N_2}$

$$= \int_{Sp_2} (\vec{D}_{N_2} + \underbrace{\vec{D}t_2}_{0})\,ds + \int_{Sp_1} (\vec{D}_{N_1} + \underbrace{\vec{D}t_1}_{0})\,ds$$

$\vec{D}_{N_1}, \vec{D}_{N_2} = const$ na Sp

$Sp_1 = Sp_2 = Sp$

$\vec{D}$ - wektor indukcji elektrycznej

$$= D_{N_2}\cdot Sp_2 - D_{N_1} Sp_1 = Sp \cdot \sigma q$$

$$\boxed{D_{N_2} - D_{N_1} = \sigma q}$$

* Składowa normalna wektora indukcji elektrycznej na granicy 2ch ośrodków zmienia swoją wartość o gęstość ładunku swobodnego znajdującego się na powierzchni granicznej.