Test z matematyki dyskretnej. Zestaw 1A

20.01.2009

			L	P		A	B	
p	q	p∨q	~(p∨q)	~p∧~q	L⇔P	p=>q	~q=>~p	A=>B
0	1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1	1

1. Jeżeli p, q są zdaniami, to
   - Tak zdanie: $\sim (p \vee q) \iff (\sim p \wedge \sim q)$ jest tautologią;
   - Tak $[w(p \Rightarrow q) = 0] \Rightarrow [w(p) = 0 \ \vee \ w(q) = 0]$;
   - Nie zdanie: $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$ może być fałszywe.

2. Jeżeli $A,\ B,\ C \subset X$ i $A \subset B \subset C$, to
   - Tak $A \uplus B = B \setminus A$;
   - Tak $A \cup B = B \cap C$;
   - Nie $A' \subset B' \subset C'$.

3. Jeżeli φ, ψ są funkcjami zdaniowymi o zakresie $X \neq \emptyset$, to prawdziwe jest zdanie
   - Nie $(\forall_{x \in X}\ \varphi(x)) \Rightarrow (\exists_{x \in X}\ \sim \varphi(x))$;
   - Tak $(\sim \exists_{x \in X}\ \varphi(x)) \iff (\forall_{x \in X}\ \sim \varphi(x))$;
   - Nie $(\exists_{x \in X} \forall_{y \in X}\ \varphi(x) \ \wedge \ \psi(y)) \Rightarrow (\forall_{x \in X} \exists_{y \in X}\ \varphi(x) \ \wedge \ \psi(y))$.

4. Prawdą jest, że
   - Tak $(\mathbb{Z},\ +,\ \cdot)$ jest pierścieniem przemiennym;
   - Nie $(\mathbb{Z}_8,\ \cdot_8)$ jest grupą;
   - Nie $(\mathbb{R} \setminus \{0\},\ \cdot)$ jest ciałem.

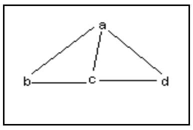
5. Dokładnie jedno rozwiązanie w zbiorze $\mathbb{Z}_{15}$ ma kongruencja
   - Nie $6x \equiv 1 \pmod{15}$; NWD(6,15)=3
   - Nie $9x \equiv 6 \pmod{15}$; NWD(9,15)=3
   - Tak $8x \equiv 3 \pmod{15}$. NWD(8,15)=1

6. W pierścieniu wielomianów $\mathbb{Z}_m[x]$ zachodzi równość $(x+2)(x+3) = x^2 + 1$, jeżeli
   - Nie $m = 6$; f(2)=5
   - Tak $m = 5$; f(3)=10
   - Nie $m = 4$.

7. Jeżeli A i B są zbiorami skończonymi, to prawdą jest, że
   - Tak $|A \cup B| = |A| + |B| \ \Rightarrow \ A \cap B = \emptyset$;
   - Nie $|A| = |B| = n \ \Rightarrow \ |A \cup B| = 2n$;
   - Nie $A \subset B \ \Rightarrow |B \setminus A| > 0$. Jeśli by było A⊂B => |B\A| ≥0, wtedy będzie prawda

8. Z elementów 10-elementowego zbioru można utworzyć
   - Tak co najmniej 1000 różnych podzbiorów; 10!
   - Tak dokładnie 120 podzbiorów siedmioelementowych; 10^7
   - Tak co najwyżej 10000 różnych ciągów pięciowyrazowych. 10^5

9. Graf prosty G, w którym $V_G = \{a,\ b,\ c,\ d,\}$ i $E_G = \{\{a,\ b\},\ \{a,\ c\},\ \{a,\ d\},\ \{c,\ d\},\ \{b,\ c\}\}$ jest
   - Nie drzewem;
   - Tak grafem spójnym;
   - Nie grafem pełnym.



10. Czy istnieje graf G, w którym
    - Tak $D_0(G) = 0,\ D_1(G) = 8,\ D_2(G) = 4,\ D_k(G) = 0$ dla $k \geqslant 3$;
    - Tak $D_0(G) = 0,\ D_1(G) = 0,\ D_2(G) = 7,\ D_k(G) = 0$ dla $k \geqslant 3$;
    - Nie $D_0(G) = 0,\ D_1(G) = 3,\ D_2(G) = 10,\ D_k(G) = 0$ dla $k \geqslant 3$.

Zadanie 1: Podać i udowodnić wzór na liczbę k-wyrazowych kombinacji z powtórzeniami ze zbioru n-elementowego.

Zadanie 2: Wykazać, że $\mathrm{NWD}(a,\ b) = \mathrm{NWD}(b,\ a \,\mathrm{MOD}\, b)$ dla $a,\ b \in \mathbb{N}$.

Test z matematyki dyskretnej. Zestaw 1B

20.01.2009

		L	P		A	B	
p	q	~(p∨q)	~p∨~q	L⇔P	p=>q	~p∨q	A=>B
0	1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1

1. Jeżeli p, q są zdaniami, to

   Nie zdanie: $\sim(p \vee q) \iff (\sim p \vee \sim q)$ jest tautologią;

   Tak $[w(p \Rightarrow q) = 1] \Rightarrow [w(q) = 1]$;

   Nie zdanie: $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim p \vee q)$ może być fałszywe.

2. Dla dowolnych podzbiorów A, B zbioru X zachodzą następujące równości

   Tak $(A \cup B) \setminus (A \uplus B) = A \cap B$;

   Nie $(A \cap B)' = A' \cap B'$;

   Tak $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$.

3. W zbiorze $\{0, 1, 2\}$ istnieje

   Nie dokładnie sześć relacji liniowego porządku;

   Nie co najmniej pięć relacji równoważności;

   co najwyżej 500 różnych relacji.

4. Prawdą jest, że

   Nie $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ jest ciałem;

   Tak $(\mathbb{Z}_7, +_7, \cdot_7)$ jest pierścieniem przemiennym;

   Tak $(\mathbb{R}, \cdot)$ jest grupą.

5. Dokładnie jedno rozwiązanie w zbiorze $\mathbb{Z}_{18}$ ma kongruencja

   Tak $5x \equiv 1 \pmod{18}$; NWD(5,18)=1

   Nie $10x \equiv 6 \pmod{18}$; NWD(10,18)=2

   Nie $15x \equiv 8 \pmod{18}$. NWD(15,18)=3

6. W pierścieniu wielomianów $\mathbb{Z}_m[x]$ zachodzi równość $(x+7)(x+3) = x^2 + 1$, jeżeli

   f(7)=50

   f(3)=10

   Tak $m = 10$;

   Nie $m = 9$;

   Nie $m = 8$.

7. Jeżeli A i B są zbiorami skończonymi, to prawdą jest, że

   Tak $|A \cup B| = |B| \Rightarrow A \subset B$;

   Tak $|A| = |B| = |A \cap B| = n \Rightarrow |A \cup B| = n$;

   Tak $A \cap B = A \Rightarrow |A \setminus B| = 0$.

8. Z elementów 10-elementowego zbioru można utworzyć

   Tak dokładnie 10! różnych podzbiorów;

   Nie nie więcej, niż 120 podzbiorów trzyelementowych;

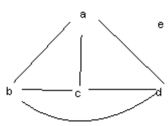
   Tak nie mniej, niż 100 000 różnych ciągów pięciowyrazowych.

9. Graf prosty G, w którym $V_G = \{a, b, c, d, e\}$ i $E_G = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}\}$ jest

   Nie drzewem;

   Nie grafem spójnym;

   Nie grafem pełnym.



10. Czy istnieje graf G, w którym

    $D_0(G) = 0$, $D_1(G) = 5$, $D_2(G) = 3$, $D_k(G) = 0$ dla $k \geqslant 3$;

    $D_0(G) = 0$, $D_1(G) = 6$, $D_2(G) = 4$, $D_k(G) = 0$ dla $k \geqslant 3$;

    $D_0(G) = 0$, $D_1(G) = 3$, $D_2(G) = 7$, $D_3(G) = 1$, $D_k(G) = 0$ dla $k \geqslant 4$.

Zadanie 1: Sformułować i udowodnić zasadę włączania i wyłączania dla dwóch zbiorów.

Zadanie 2: Wykazać, że jeżeli $a \equiv b \pmod{n}$ i $c \equiv d \pmod{n}$, to $ac \equiv bd \pmod{n}$.

Test z matematyki dyskretnej. Zestaw 2A
26.01.2009

1. Niech p, q będą zdaniami i $w(p \Rightarrow q) = 0$.Wtedy
   - Nie $w(p \vee q) = 0$;
   - Tak $w(p \wedge \sim q) = 1$;
   - Tak $w(p \oplus q) = 1$.

p	q	p=>q	p∨q	p∧~q	p⊕q
1	0	0	1	1	1

2. Prawdziwa jest równość
   - Nie $\{x \in \mathbb{R}:\ x^2 - 4 \leqslant 0\} = \{x \in \mathbb{R}:\ \frac{x+2}{x-2} \leqslant 0\}$;
   - Tak $\{x \in \mathbb{N}:\ x^2 + 5x + 6 < 0\} = \emptyset$;
   - Nie $2^{\emptyset} = \emptyset$.

x=-2, x=-3

3. Relacja $\mathcal{R}$ w zbiorze $X \neq \emptyset$ jest
   - Tak zwrotna, jeżeli $\forall_{x \in X}\ x\mathcal{R}x$;
   - Tak antysymetryczna, jeżeli $\forall_{x,\, y \in X}\ (x\mathcal{R}y\ \wedge\ y\mathcal{R}x) \Rightarrow (x = y)$;
   - Nie przechodnia, jeżeli $\forall_{x,\, y,\, z \in X}\ (x\mathcal{R}y\ \wedge\ y\mathcal{R}z) \Rightarrow (z\mathcal{R}x)$.
4. Prawdą jest, że
   - Nie każda relacja jest funkcją;
   - Nie każda iniekcja jest bijekcją;
   - Tak dla danej funkcji przeciwobraz zbioru jest podzbiorem dziedziny tej funkcji.
5. Działanie $\circ$ jest wewnętrzne w zbiorze X, jeżeli
   - Nie $X = \mathbb{Q}$ i $\forall_{x,\, y \in X}\ x \circ y = 2^{x+y}$;
   - Tak $X = \mathbb{R}_+$ i $\forall_{x,\, y \in X}\ x \circ y = \frac{x}{y}$;
   - Tak $X = \mathbb{Z}$ i $\forall_{x,\, y \in X}\ x \circ y = \frac{1}{2}x(x+1)y$.
6. Rozwiązanie $(x,\, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ posiada równanie
   - Nie $27x + 15y = 1$; NWD(27,15)=3
   - Tak $32x + 21y = 5$; x=10, y=-15
   - Tak $12x + 17y = 0$. x=0, y=0
7. Jeżeli $a(x),\, b(x) \in \mathbb{Z}_m[x]$, gdzie $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, to
   - Nie $\deg(a(x) + b(x)) = \deg a(x) + \deg b(x)$;
   - Tak $\deg(a(x) \cdot b(x)) \leqslant \deg a(x) + \deg b(x)$;
   - Tak $\deg(a(x) + b(x)) \leqslant \max(\deg a(x),\, \deg b(x))$.
8. Niech A, B, C będą zbiorami i $|A| = 15$, $|B| = 12$, $|C| = 10$. Wtedy
   - Nie $A \cap B \cap C = \emptyset\ \Rightarrow\ |A \cup B \cup C| = 37$;
   - Tak $A \cap B \cap C \neq \emptyset\ \Rightarrow\ |A \cup B \cup C| < 37$;
   - Tak $|A \cup B \cup C| \geqslant 15$.
9. Liczba rozmieszczeń 5 kul w 5 ponumerowanych pudełkach wynosi
   - Nie $\binom{9}{4}$, jeżeli kule są nierozróżnialne;
   - Tak $5!$, jeżeli kule są rozróżnialne;
   - Nie 5, jeżeli kule są identyczne i dokładnie jedno pudełko pozostaje puste.
10. Prawdą jest, że
    - Nie każdy graf prosty jest drzewem;
    - Tak każdy graf spójny zawiera minimalne drzewo rozpinające;
    - Nie każdy wierzchołek grafu pełnego K_n ma stopień równy n.

Zadanie 1: Na płaszczyźnie danych jest pięć punktów o obu współrzędnych całkowitych. Wykazać, że przynajmniej jeden z odcinków łączących te punkty ma środek o obu współrzędnych całkowitych.

Zadanie 2: Wykazać, że relacja podzielności w zbiorze $\mathbb{N}$ jest relacją częściowego porządku. Czy jest ona również relacją równoważności?

Test z matematyki dyskretnej. Zestaw 3A

02.02.2009

1. Zdaniem logicznym jest

   Nie $x^2 + y^2 \geqslant 0$;

   Nie $\exists_{x \in \mathbb{N}}\ 3|x| = 5$;

   Tak $2 + 2 = 5$.

2. Jeżeli $A \subset B \subset C$, to

   Nie $A \cap B \subset A \uplus B$;

   Tak $A \setminus C = B \setminus C$;

   Tak $(A \cap B) \cup C = C$.

3. Zbiorem skończonym jest

   Nie $\{n \in \mathbb{N}^* :\ \exists_{k \in \mathbb{N}}\ k^2 | n\}$;

   Nie $\{n \in \mathbb{N} :\ 2n \in \mathbb{P}\}$;

   Tak $\{n \in \mathbb{Z} :\ |3n - 28| \leqslant n\}$.

4. Grupą abelową jest para

   Nie $(\mathbb{Z}_{93}^{+}, \cdot_{93})$; Nie, bo 93 nie jest liczbą pierwszą

   Tak $(\mathbb{Z}_{64}, +_{64})$;

   Nie $(\mathbb{Z}_2^{+}, \cdot)$.

5. Prawdą jest, że

   Nie $\forall_{x \in \mathbb{R}}\ \lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$; Gdyby x należało do zbioru liczb całkowitych to wtedy tak

   Nie $\mathrm{NWD}(5972211, 37821) = 1$; Nie, ponieważ liczby 5972211 i 37821 są też podzielne przez 3

   Tak $(-75)\,\mathrm{MOD}\,12 = 9$. (-75)/12=-6 r -3 lub (-75)/12=-7 r 9

6. Równanie $x^2 + 2 = 0$, gdzie $x^2 + 2 \in \mathbb{Z}_m[x]$, ma dokładnie dwa rozwiązania, jeżeli

   Tak $m = 3$; x=1, x=2 f(1)=3 f(4)=18

   Nie $m = 5$; f(2)=6 f(5)=27

   Tak $m = 6$. x=2, x=4 f(3)=11

7. Prawdziwa jest równość

   Tak $5^{\underline{5}} = 120$; 5*4*3*2*1=120

   Tak $4^{\overline{3}} = 120$; 4*5*6=120

   Nie $\binom{1/2}{2} = -\frac{1}{8}$.

8. Dla dowolnych liczb $k, n \in \mathbb{N}^*$, $k \leqslant n$, zachodzi

   Nie $K_n^k = K_k^{n-1}$;

   Nie $C_n^k = k! V_n^k$;

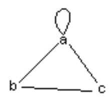
   Tak $V_n^k \leqslant W_n^k$.

9. Niech G bedzie grafem, $V_G = \{a, b, c\}$ i $E_G = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, a\}\}$. Wówczas

   Nie G jest grafem prostym;

   Tak G ma pętlę;

   Tak $\deg(a) = 4$.



10. Jeżeli T jest drzewem, $V_T = \{a, b, r, x, y\}$, $E_T = \{\{r, a\}, \{r, b\}, \{b, x\}, \{b, y\}\}$ i r jest korzeniem, to porządkiem prefiksowym w zbiorze wierzchołków drzewa T może być

    Tak $rabxy$;

    Nie $rbyxa$;

    Nie $raxyb$.

Zadanie 1: Wykazać, że istnieje dokładnie $\binom{n}{k}$ k-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego, gdzie $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n$.

Zadanie 2: Rozstrzygnąć, czy istnieją elementy 27^{-1} mod 93 i 17^{-1} mod 93. Jeżeli tak, to wyznaczyć je.